

# Momento angolare e processi di collisione

- Invarianza per rotazioni e conservazione del momento angolare
- Parametro d'impatto e momento angolare
- Potenziale centrifugo
- Meccanica classica e meccanica quantistica: sviluppo in onde parziali
- Stima del momento angolare in processi di collisione
- Spin e composizione dei momenti angolari
- Regole di selezione collegate alla conservazione del momento angolare

## Invarianza per rotazioni e conservazione del momento angolare

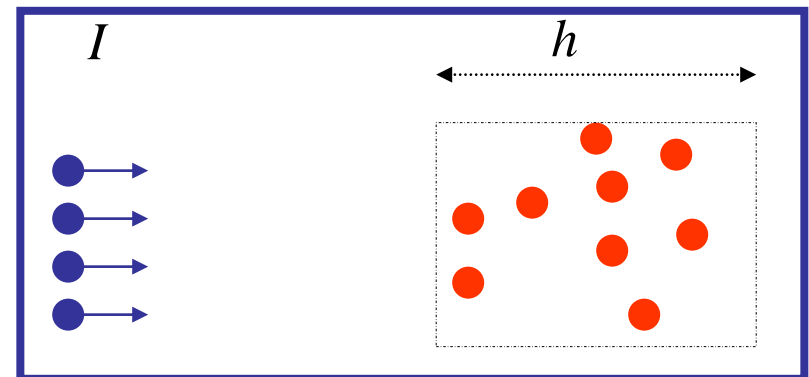
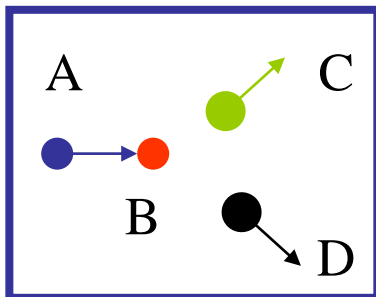
- C'è una relazione generale, in fisica classica e quantistica, fra invarianze e leggi di conservazione
- All'invarianza delle leggi fisiche per traslazioni spaziali e associata la conservazione dell'impulso  $\mathbf{P}$ , alle traslazioni temporali la conservazione dell'energia  $\mathbf{E}$ , alle rotazioni il momento angolare totale  $\mathbf{J}$ .
- In questo capitolo esamineremo alcune conseguenze della conservazione del momento angolare nei processi d'urto, prima in fisica classica e poi in fisica quantistica.
- Ripartiamo dunque dalla definizione operativa della principale osservabile dei processi di collisione, la sezione d'urto, ed esaminiamo l'interpretazione che ne abbiamo dato, nel semplice modello geometrico finora considerato.

# La definizione operativa di sezione d'urto

- Ripartiamo dalla definizione operativa che abbiamo dato
- Supponiamo di voler studiare la reazione  $A+B \rightarrow C+D$  mandando un fascio di particelle A contro una “targhetta” (=target, bersaglio) di particelle B.
- Il fascio è caratterizzato dalla “corrente”  $I$  (numero di particelle prodotte per unità di tempo), dal tipo di particelle e dalla loro energia.
- La “targhetta” è caratterizzata dalla densità di bersagli (numero/volume)  $n$  e dallo spessore  $h$ .
- La quantità misurabile è il numero di reazioni per unità di tempo  $\Delta N/\Delta t$ .
- Se la targhetta è sottile (cioè è piccola la probabilità che ciascun proiettile faccia una collisione) il numero di reazioni che avvengono nell'unità di tempo è proporzionale alla corrente, alla densità e allo spessore:

$$\Delta N/\Delta t = I n h \sigma.$$

- **La costante di proporzionalità, che ha le dimensioni di  $[L]^2$ , si chiama sezione d'urto della reazione  $A+B \rightarrow C+D$**



# L'interpretazione della sezione d'urto

- Supponiamo che la reazione  $A+B \rightarrow C+D$  avvenga quando le particelle A e B si trovino a distanza  $d < r$ , con probabilità  $w$ .
- Per ciascuna particella (i) che entra nel bersaglio, la probabilità  $P_i$  di effettuare una reazione sarà data dal numero di incontri  $N_i$  che avvengono con distanza  $d < r$ , moltiplicata per la probabilità di reazione  $w$  in ciascun incontro,  $P_i = N_i w$  \*.
- Se medio su tante particelle  $N_i \rightarrow \langle N \rangle = \pi r^2 n h$   
e  $P_i \rightarrow \langle P \rangle = \pi r^2 w n h$
- Se  $I$  è il numero di particelle che entrano nel bersaglio nell'unità di tempo, il numero di interazioni nell'unità di tempo sarà  $I \langle P \rangle$  e dunque:

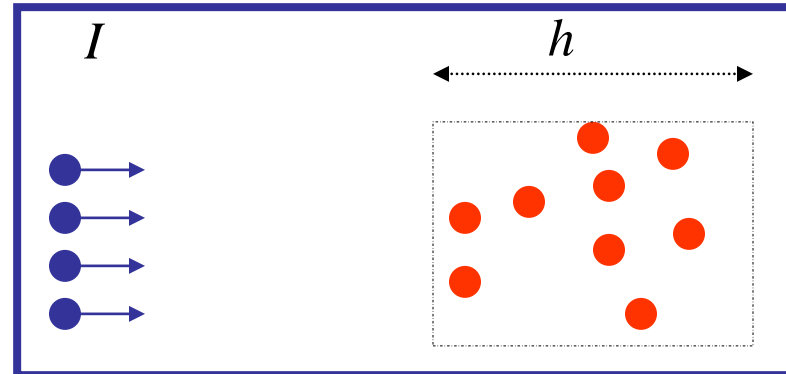
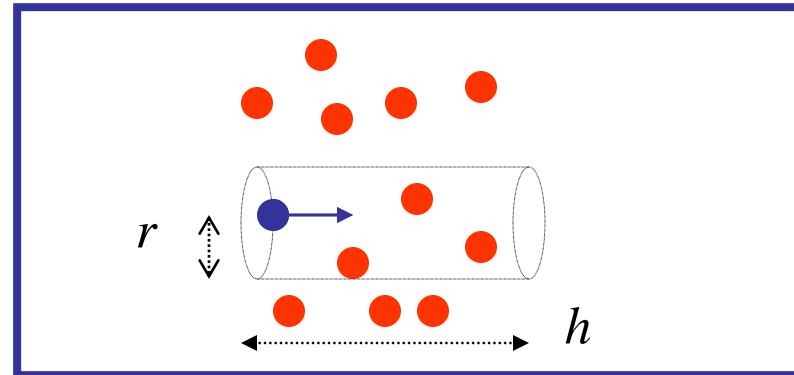
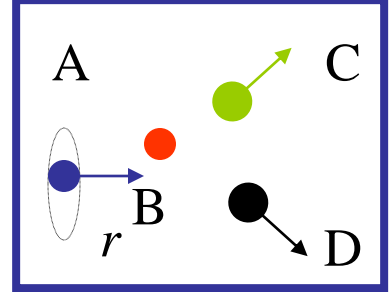
$$\Delta N / \Delta t = I n h \pi r^2 w$$

- Confrontando con la definizione di  $\sigma$  data da

$$\Delta N / \Delta t = I n h \sigma$$

- ne ricavo:  $\sigma = \pi r^2 w$

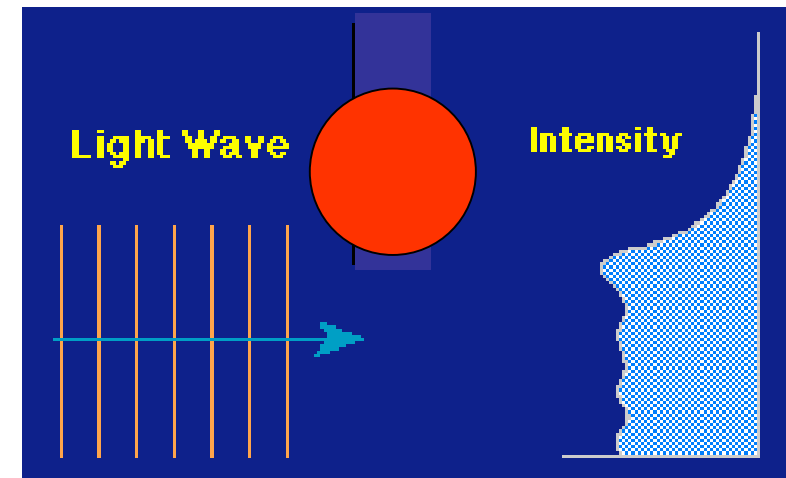
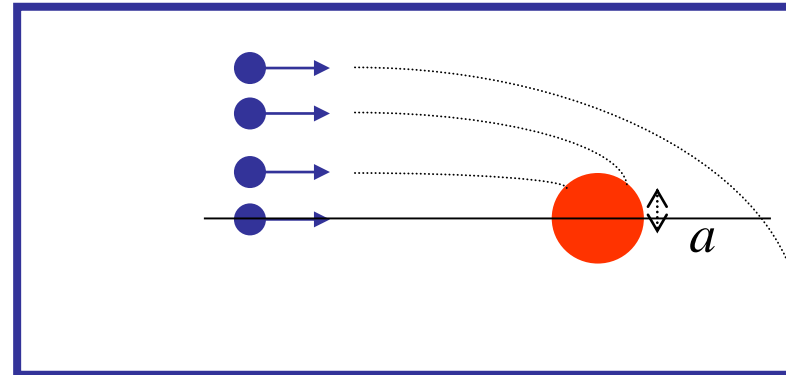
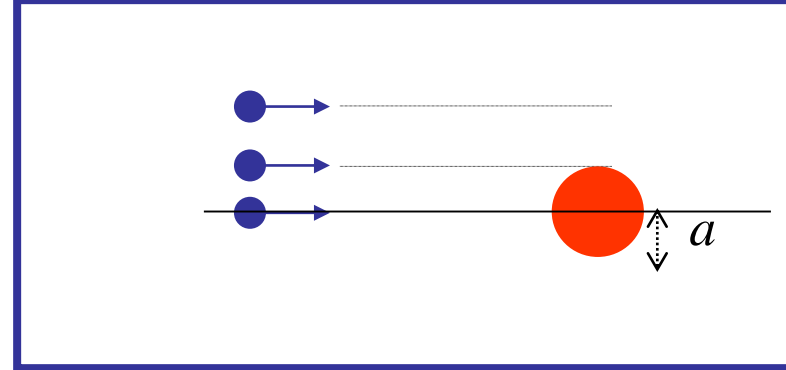
\*Questo è vero per una targhetta "sottile" in cui la



- **La sezione d'urto rappresenta il prodotto dell'area geometrica in cui avviene l'interazione per la probabilità che la stessa avvenga.**

# L'interpretazione della sezione d'urto

- Ci sono due grosse semplificazioni nell'analisi che abbiamo fatto:
  - 1) Abbiamo supposto che il moto fosse libero fino alla zona di interazione ( $a$ )\*, cioè che non ci fossero forze fuori di questa
  - 2) Abbiamo analizzato il problema in termini geometrici, cioè abbiamo trascurato l'aspetto ondulatorio del moto delle particelle che stanno urtando
- \*)Indichiamo d'ora in avanti con  $a$  le dimensioni della zona di interazione, che prima chiamavamo  $r$  e usiamo questo simbolo per esprimere la distanza fra le particelle durante la collisione

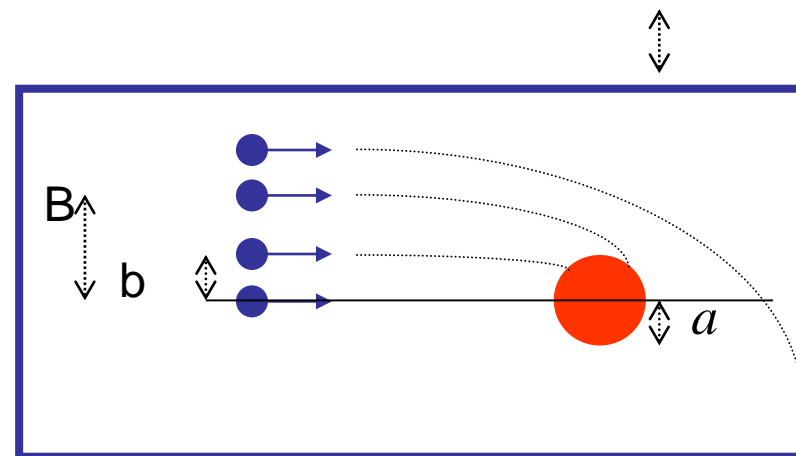
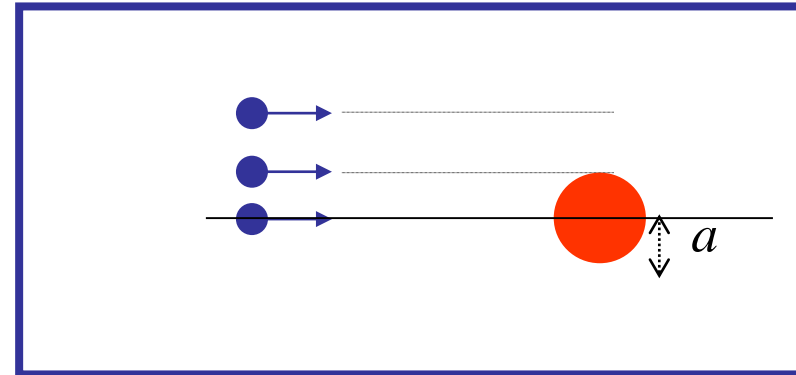


# Gli effetti delle forze “a lungo raggio”(1)

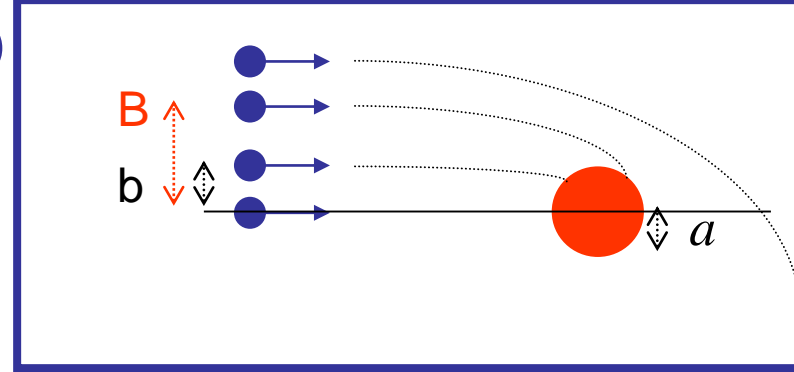
- Teniamoci per adesso nella fisica classica (=non quantistica) ed andiamo a studiare la deflessione delle orbite, per chiederci quali sono quelle particelle che riescono a raggiungere il bersaglio.
- Sia **b** il parametro d’impatto e **V** la velocità iniziale della particella, di massa **m**\*
- Si tratta di determinare il massimo parametro d’impatto (**B**) per cui l’orbita sfiora la regione d’interazione (**a**) cioè determinare quel **b** per cui l’orbita è tangente alla sfera di raggio **a**
- Supponiamo che il moto relativo sia descritto da un potenziale **U** che tende a 0 per distanze grandi.
- Dalla conservazione dell’energia ho che durante l’urto:

$$\frac{1}{2} m v^2 + U = \frac{1}{2} m V^2$$

- \*In questo paragrafo consideriamo velocità non relativistiche



# Gli effetti delle forze “a lungo raggio”(2)



- Supponiamo che il potenziale sia centrale cioè  $U=U(r)$
- Il momento angolare  $L_{tot}$  è conservato e quindi:
  - A) il moto è in un piano
  - B) Separando la velocità nella sua componente radiale  $v_r = dr/dt$  e normale ad essa  $v_n$  la quantità  $L = m r v_n$  è costante durante la collisione. Il valore iniziale è  $L = m V b$ , dunque durante il moto:

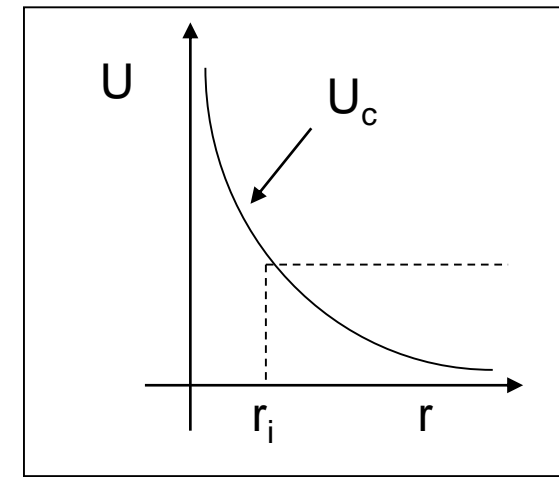
$$v_n = V b / r$$

- Quindi la conservazione del momento angolare fissa il valore di  $v_n$  lungo la traiettoria.
- Se tengo conto di questo e di  $v^2 = v_r^2 + v_n^2$  posso riscrivere la conservazione dell'energia come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m V^2 &= \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_n^2) + U(r) = \\ &= \frac{1}{2} m v_r^2 + \frac{1}{2} m V^2 \frac{b^2}{r^2} + U(r) \end{aligned}$$

- Se l'orbita è tangente in  $a$  significa che per  $r=a$  si ha  $v_r=0$ . Questo determina  $B$ :
- $B^2 = a^2 [1 - U(a) / (\frac{1}{2} m V^2)]$
- L'espressione per la sezione d'urto che prima scrivevamo  $\sigma = \pi a^2 w$  va dunque modificata in  $\sigma = \pi B^2 w = \pi a^2 w [1 - U(a) / (\frac{1}{2} m V^2)]$
- Da osservare che se  $\frac{1}{2} m V^2 \gg U(a)$  si ritrova l'espressione precedente, altrimenti, si ha un fattore di correzione, positivo o negativo a seconda che il potenziale sia attrattivo ( $U < 0$ ) o repulsivo ( $U > 0$ )

# La barriera centrifuga



$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m V^2 \frac{b^2}{r^2} + U(r) = \frac{1}{2} m V^2$$

- Posso riscrivere il secondo termine come un potenziale centrifugo:

$$U_c(r) = \frac{1}{2} m V^2 \frac{b^2}{r^2} = \frac{L^2}{2mr^2}$$

- Il moto della coordinata radiale è dunque determinato da un potenziale effettivo

$$U_{\text{eff}}(r) = U + U_c$$

dove il secondo termine rappresenta una barriera, detta barriera centrifuga.

- La minima distanza di avvicinamento ( $r_i$ ) fra due particelle dipende dall'energia e dal momento angolare, ed è determinabile dalla condizione  $(dr/dt) = 0$

- Per una fissata energia la minima distanza di avvicinamento cresce al crescere del momento angolare.
- I processi che avvengono a distanze “piccole” sono dunque quelli in cui è “piccolo” il momento angolare.
- La relazione quantitativa fra le quantità dipende dalla forma del potenziale. Se si trascura questo si trova immediatamente:

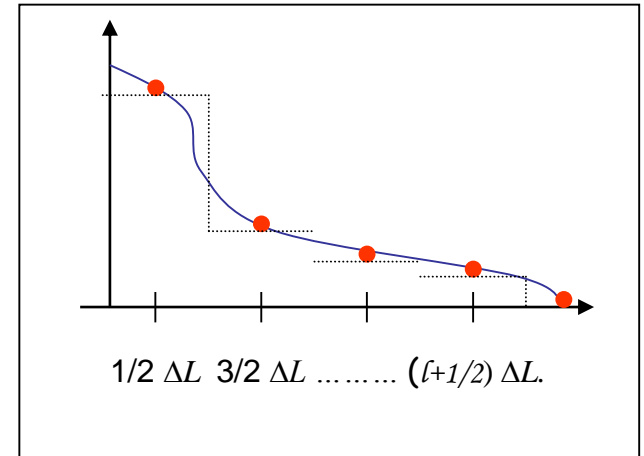
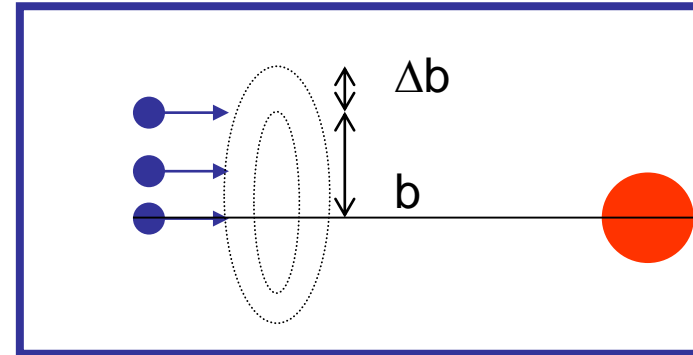
$$r_i^2 = L^2 / (mV)^2$$

- Ossia, in termini dell'impulso  $p = mV$ :

$$r_i = L/p$$



# Lo sviluppo in onde parziali



- Sulla base di quanto appena detto è naturale generalizzare l'interpretazione della sezione d'urto: per ciascun parametro d'impatto  $b$  e per ciascun valore dell'impulso  $p=mV$  ci sarà una specifica probabilità,  $w = w(b, p)$ .

- La sezione d'urto conterrà contributi da ciascuna corona circolare con peso  $w$ :

$$\sigma = 2\pi \int db \, b \, w(b, p)$$

- Utilizzando la relazione  $L=pb$  si può cambiare variabile di integrazione e scrivere:

$$\sigma = (2\pi/p^2) \int dL \, L \, w(L, p)$$

- Sia  $\Delta L$  una quantità sufficientemente piccola di momento angolare; posso allora trasformare l'integrale in una serie, in cui calcolo l'integrando nel punto  $L = (l+1/2) \Delta L$ :

$$\sigma = (\pi/p^2) \Delta L^2 \sum_l (l+1/2) w(l, p)$$

- La quantizzazione del momento angolare orbitale consiste nel fatto che  $\Delta L$  non è arbitrariamente piccolo, ma vale  $\Delta L = \hbar$

- Da cui

$$\sigma = (\pi \hbar^2 / p^2) \sum_l (l+1/2) w(l, p)$$

- Questa espressione, che rappresenta il risultato fondamentale, è lo sviluppo in onde parziali della sezione d'urto.

# Meccanica classica e meccanica quantistica

- Le espressioni da confrontare sono:
  - (1)  $\sigma = 2\pi \hbar b w(b, p)$
  - (2)  $\sigma = (\pi \hbar^2 / p^2) \sum_l (\ell + 1/2) w(\ell, p)$
- È chiaro che non posso dimostrare (2) da (1), nel senso che non posso “ricavare” la meccanica quantistica dalla meccanica classica.
- È invece possibile il viceversa: quando i momenti angolari che contano nel processo sono molti, la formula classica (1) è una buona approssimazione del risultato quantistico (2).
- Se sono interessato a processi che avvengono a una scala di distanze  $a$  ed ho a disposizione un impulso  $p$ , il momento angolare tipico del processo è  $L = pa$ . La condizione  $L \gg \hbar$  significa dunque:

$$p a \gg \hbar.$$

- Questa è una conseguenza del principio di indeterminazione: **per esplorare dimensioni dell'ordine di  $a$  sono necessari impulsi maggiori di  $\hbar/a$ .**
- Da notare che la meccanica quantistica introduce naturalmente una scala di lunghezza  $\lambda = \hbar / p$  (e quindi di area) nella (2).
- Le sezioni d'urto dipendono dunque dalla distanza  $a$  alla quale avviene l'interazione (“il range del campo di forze) e da  $\lambda$ ; delle due quantità domina quella che è più grande.

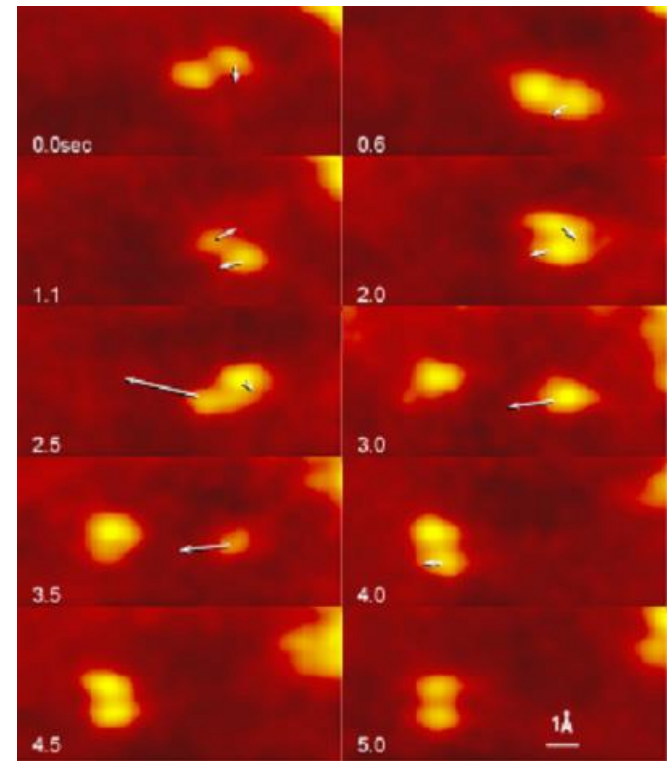
# Alcune proprietà delle $w$

- La teoria dell'urto quantistico stabilisce alcune proprietà generali delle  $w(l,p)$ , in termini della :
  1. Unitarietà in onde parziali
  2. Comportamento a basse energie
  3. Comportamento in vicinanza della soglia
  4. Comportamento in presenza di una risonanza
- Queste questioni sono importanti, e verranno affrontate nel corso sulla teoria della diffusione.

## Le distanze esplorabili

$a$ (cm)	$pc$ (eV)	$E_\gamma$ (eV)	$T_e$ (eV)	$T_p$ (eV)	Note
$10^{-8}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	4	$2 \cdot 10^{-3}$	$e e p$ NR
$10^{-13}$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^7$	$p$ NR
$10^{-16}$	$2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{11}$	

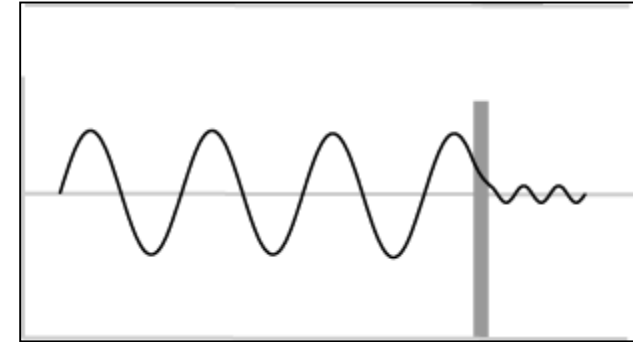
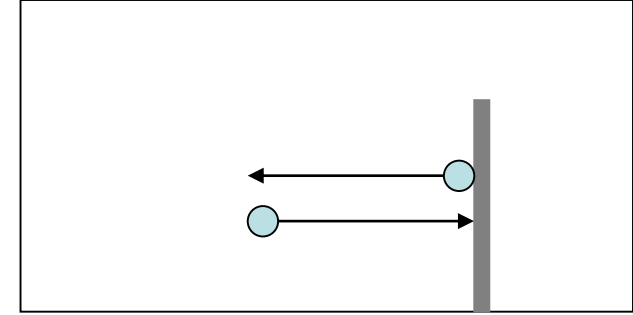
- Per esplorare dimensioni dell'ordine di  $a$  sono necessari impulsi maggiori di  $p = \hbar/a$ . Si può stimare questo minimo valore di  $p$  da  $pc = \hbar c/a = 200 \text{ MeV fm}/a = 2 \cdot 10^{-5} \text{ eV cm}/a$  e valutare le corrispondenti energie per  $\gamma$ ,  $e$ ,  $p$  (per  $e$  e  $p$  sono riportate le energie cinetiche,  $T = E - m$ )
- Sono necessari raggi X per poter vedere le dimensioni di un atomo, mentre già ad energie termiche nelle collisioni atomo atomo vale il limite geometrico
- Nelle collisioni di un neutrone termico con un nucleo, la sezione d'urto è dominata dalla lunghezza d'onda del neutrone, non dalle dimensioni del nucleo
- Per esplorare dimensioni nucleari, cioè vedere l'interno di un nucleo occorrono elettroni con energie di almeno centinaia di MeV



- Per esplorare distanze dell'ordine di  $10^{-16} \text{ cm}$ , alle quali sono rilevanti le interazioni deboli, sono necessarie almeno centinaia di  $\text{GeV}_{12}$

## Distanze esplorabili e distanze accessibili

- Il principio di indeterminazione, se da un lato impone limitazioni alle distanze che si possono esplorare in dettaglio, dall'altro permette di accedere a distanze classicamente inaccessibili.
- Classicamente, una particella con energia cinetica  $T$  non può superare una barriera di potenziale  $U > T$ . Con questa sonda non si possono avere informazioni su quel che succede al di là della barriera.
- Quantisticamente c'è sempre un'onda trasmessa al di là della barriera.
- La zona oltre la barriera, classicamente proibita, è accessibile per l'onda, sia pure con probabilità esponenzialmente piccola ( $P \approx \exp\{-[2m(U-T)]^{1/2}L/\hbar\}$ ), dove  $L$  è lo spessore della barriera.



- Questo ha importanti applicazioni nei processi d'urto (es.: reazioni di fusione nucleare sotto la barriera coulombiana) e nei processi di decadimento (es.: decadimento  $\alpha$ )

# La conservazione del momento angolare totale

- Nell'urto di due particelle A e B il momento angolare totale  $\mathbf{J}$  è dato dalla somma del momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$  e degli spin  $\mathbf{S}_A$  ed  $\mathbf{S}_B$  delle due particelle. La quantità conservata è  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$  ossia:

$$\mathbf{J}_{\text{in}} = \mathbf{J}_{\text{fin}}$$

- Gli spin di atomi, nuclei e costituenti ultimi della materia sono dell'ordine di  $\hbar$  (in particolare, tutti i quarks e i leptoni hanno spin  $s=1/2$ , cioè  $S^2 = s(s+1)\hbar^2 = 3/4\hbar^2$ ). Lo spin ha un ruolo quando il suo valore è confrontabile con  $L$ , come in molte collisioni atomiche, nucleari e subnucleari.
- La conservazione del momento angolare ha importanti conseguenze, una per tutte, la conservazione del “numero” dei fermioni (particelle con spin semintero, come i quarks e i leptoni):
- **Se nello stato iniziale è presente un numero dispari (pari) di fermioni, nello stato finale ci sarà un numero dispari (pari) di fermioni**
- Questo segue dal fatto che, componendo un numero dispari (pari) di momenti angolari seminteri  $\mathbf{K}_i$ , la risultante  $\mathbf{K} = \sum \mathbf{K}_i$  è semintera (intera).
- Dunque, se il numero iniziale di fermioni è dispari, lo spin totale  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \dots + \mathbf{S}_n$  è semintero. Poiché il momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$  è intero, il momento angolare totale,  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  è semintero. Nello stato finale  $\mathbf{L}'$  ed  $\mathbf{S}'$  saranno in generale diversi, ma  $\mathbf{J}' = \mathbf{L}' + \mathbf{S}' = \mathbf{J}$  e dunque  $\mathbf{J}'$  è semintero. Poiché  $\mathbf{L}'$  è intero, dovrà essere  $\mathbf{S}'$  semintero, e quindi un numero dispari di fermioni. Analogamente se il numero iniziale era pari.
- Notare che non è detto che il numero di particelle nello stato iniziale e finale debba essere lo stesso.

# Numero di fermioni, numero di barioni, di leptoni e di fermioni. e numero leptonico

- In ogni processo fisico finora osservato (collisioni o decadimenti) sono conservati il numero barionico  $B = 1/3 [N(\text{quark}) - N(\text{antiquark})]$  e il numero leptonico  $L = N(\text{leptoni}) - N(\text{antileptoni})$ :

$$B_{\text{in}} = B_{\text{fin}} \quad \text{e} \quad L_{\text{in}} = L_{\text{fin}}$$

- Questo garantisce che sia conservato il “numero” di fermioni
- Infatti, se nello stato iniziale è presente un numero dispari (**pari**) di quarks+antiquarks,  $3B$  è dispari (**pari**). La conservazione di  $B$  dà dunque che anche nello stato finale  $B$  è dispari (**pari**) e quindi c'è un numero dispari(**pari**) di quarks+antiquarks. In maniera analoga per i leptoni.
- Non è detto che  $L$  e  $B$  siano delle grandezze assolutamente conservate e teoricamente ci si aspetta che  $L$  e/o  $B$  possano essere violati in alcuni processi.
- La conservazione del momento angolare pone comunque in relazione le variazioni delle due quantità. Se in un processo ho  $\Delta B = (B_{\text{in}} - B_{\text{fin}}) = 1$  significa che il numero di quarks più antiquarks è cambiato di una quantità dispari, ma allora anche il numero di leptoni+antileptoni deve essere cambiato di una quantità dispari, quindi

$$\Delta L = (L_{\text{in}} - L_{\text{fin}}) \neq 0.$$

- Cioè in un processo in cui il numero barionico è cambiato di un'unità anche il numero leptonico deve essere violato. Analogamente  $\Delta L = 1$  implica  $\Delta B \neq 0$

# Esercizi

- Calcolare la sezione di cattura di meteoriti con  $v=10\text{km/s}$  da parte della terra ( $R=6.000\text{ km}$ ) e confrontarla con la dimensione geometrica
- Calcolare la sezione d'urto per cattura nel sole di neutralini con velocità  $v=200\text{km/s}$  e confrontarla con la dimensione geometrica ( $R=700.000\text{ km}$ ). Calcolare la lunghezza d'onda di neutralini con  $M=100\text{ GeV}$
- Un cannone elettronico (tensione  $V=1\text{KV}$ ) spara elettroni contro una sfera conduttrice di raggio  $r=1\text{cm}$ . , inizialmente scarica ed isolata. Calcolare la massima carica che può acquistare la sfera. Se  $I$  è la corrente erogata dal cannone, calcolare come varia la carica  $Q(t)$  della sfera in funzione del tempo.
- Calcolare la lunghezza d'onda di un neutrone termico e confrontarla con la dimensione di un nucleo